المعادلات التفاضلية الخطية غير متجانسة من الرتبة n وذوات معاملات ثابتة:

الشكل العام للمعادلة هو:

$$y^{n} + a_{n-1} y^{n-1} \text{———} + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

وهذه المعادلة تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D على النحو التالي:

$$(D^{n} + a_{n-1} D^{n-1} \text{———} + a_1 D + a_0) y = f(x) \quad (2)$$

أو اختصاراً على النحو الآتي

$$\varphi(D) \cdot y = f(x) \quad (3)$$

$$\varphi(D) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot D^j \qquad a_n = 1$$

واستناداً إلى الفصل الأول فيكون الحل العام لهذه المعادلة هو $y = y_h + y_p$

حيث y_h هو الحل العام للمعادلة $\varphi(D) y = 0$

و y_p نعني حل خاص للمعادلة (3)

ويمكن إيجاد هذا الحل باستخدام إحدى الطرق الثلاثة الآتية:

أولاً: طريقة المعاملات غير المعينة:

هذه الطريقة تمتاز ببساطتها وسهولتها لكن يعيبها بأنها لا تستوعب إلا على أنواع محددة لدالة $f(x)$ وهذه الطريقة تخمينية لكن مع أنها تخمينية توجد ضوابط محددة لهذه الطريقة.

مثال: اعتماداً على طريقة معاملات غير المعينة أوجد حلاً خاصاً للمعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

نحن لنقترح حلاً خاصاً من الشكل:

$$y_p = \beta \cdot x^2$$

حيث β المعامل غير المعين الذي علينا تعيينه، لتعيين هذا المعامل نشتق هذا الحل المقترح مرتين متتاليتين:

$$y'_p = 2\beta \cdot x \;, \quad y''_p = 2\beta$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة.

$$2\beta - 3(2\beta)x + 2\beta x^2 = x^2$$

$$2\beta x^2 - 6\beta x - 2\beta = x^2$$

بالمطابقة نجد أن

$2\beta = 1$, $-6\beta = 0$, $2\beta = 0$

$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\beta = 0$

ونلاحظ بأن المعامل β أخذ قيمتين مختلفتين بآن واحد هما $\beta = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$

وهذا غير ممكن.

لنقوم الآن بتعديل الحل الخاص المقترح.

لنقترح الحل الخاص من الشكل $y_p = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$ حيث $\beta_2, \beta_1, \beta_0$ هي المعاملات

التي يراد تعيينها لتعيينها نشتق وأطابق:

$$y'_p = 2\beta_2 x + \beta_1 \Rightarrow y''_p = 2\beta_2$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أن:

$$2\beta_2 - 3(2\beta_2 x + \beta_1) + 2(\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) = x^2$$

$$2\beta_2 x^2 + (-6\beta_2 + 2\beta_1)x + (2\beta_2 - 3\beta_1 + 2\beta_0) = x^2$$

بالمطابقة نجد:

$2\beta_2 = 1$, $-6\beta_2 + 2\beta_1 = 0$, $2\beta_2 - 3\beta_1 + 2\beta_0 = 0$

عدد المعادلات بعض المطابقة يساوي عدد المعاملات

$\beta_2 = \frac{1}{2}$; $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_0 = \frac{7}{4}$

ومنه فإن

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$ هو الحل الخاص المطلوب

مثال 2: وفق طريقة المعاملات غير المعينة أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x$$

نقترح حلاً خاصاً من الشكل: $y_p = \beta \sin x$; β معامل يراد تعيينه

لتعيين β نشتق ونعوض في المعادلة،

$y'_p = B\cdot\cos x \quad ; \quad y''_p = -B\sin x$

نعوض في المعادلة فنجد أن :

$-B\cdot\sin x + B\cdot\cos x + B\cdot\sin x = \sin x$

$B\cdot\sin x + B\cdot\cos x = \sin x = 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos x$

بالمطابقة نجد أن $B=0 \quad , \quad B=1$

نلاحظ أن B أخذ قيمتين مختلفتين بآن واحد وهذا مرفوض سنقوم نقترح حل خاص جديد :

$y_p = B_1\cdot\sin x + B_2\cdot\cos x$

$y'_p = B_1\cdot\cos x - B_2\cdot\sin x$

$y''_p = -B_1\cdot\sin x - B_2\cos x$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد :

$-B_1\cdot\sin x - B_2\cos x + B_1\cdot\cos x - B_2\cdot\sin x + 2B_1\sin x + 2B_2\cos x = \sin x$

$(-B_1 - B_2 + 2B_1)\sin x + (-B_2 + B_1 + 2B_2)\cos x = \sin x$

$(B_1 - B_2)\sin x + (B_1 + B_2)\cos x = \sin x$

بالمطابقة نجد

$B_1 - B_2 = 1$

$B_1 + B_2 = 0$

بحل جملة هاتين المعادلتين نجد أن $B_2 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad B_1 = \frac{1}{2}$

ومنه فإن الحل الخاص يكون :

$y_p = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

<u>مثال 3</u> أوجد الحل الخاص للمعادلة : $y'' - y' + 2y = e^x$

لنقترح حلاً خاصاً من الشكل $y_p = B\cdot e^x$ و B معامل يراد تعيينه لذلك نشتق مرتين فنجد أن :

$y'_p = B\cdot e^x \quad ; \quad y''_p = B\cdot e^x$

SUBJECT: / /

$\beta e^x - \beta \cdot e^x + 2\beta \cdot e^x = e^x$

$2\beta e^x = e^x \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2} e^x$

* من خلال الأمثلة الثلاث السابقة نلاحظ مايلي :

- من خلال المثال الأول لاحظنا أنه في الاقتراح الأول أخطأنا في الاقتراح وتم تعديله .

- أما في المثال الثاني أيضاً أخفقنا وتم أيضاً تعديل .

- في المثال الثالث لم نخطئ وكان الحل المقترح هو الحل الخاص المطلوب

- لماذا ؟

- سنوضح القاعدة الأساسية .

- القاعدة الأساسية لاقتراح طريقة حل خاص للمعادلات غير المتجانسة :

لاقتراح حل خاص لمعادلة تفاضلية معطاة ذات معاملات ثابتة نوجد الحل العام للمتجانسة .

. نوجد الحل العام للأمثلة السابقة

-1- $y'' - 3y' + 2y = 0$

$M^2 - 3M + 2 = 0$

$M = 1 \ , \ M = 2$

$y_h = A_1 \cdot e^x + A_2 \cdot e^{2x}$

-2- $y'' + y' + 2y = \sin x$

$M^2 + M + 2 = 0$

$\Delta = -7 \quad M_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$

$M_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$

$y_h = e^{-\frac{1}{2}x} (A_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + A_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x)$

-3- $y'' - y' + 2y = e^x$

$M^2 - M + 2 = 0$

$\Delta = -7$

$M_1 = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}$

$M_2 = \frac{1 - \sqrt{7}i}{2}$

$y_h = e^{\frac{1}{2}x} [A_1 \cdot \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + A_2 \cdot \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x)$

نلاحظ إن الامثلة الثلاثة السابقة نوجد الحل العام ونقترح حل خاص يتكون من الدالة $f(x)$ وجميع المشتقات العليا لهذا الدالة ففي المثال الاول $f(x)=x^2$ اقترحنا الحل الخاص x^2 , x , 1 وفي المثال الثاني $f(x)=\sin x$ اقترحنا الحل الخاص $\cos x$, $\sin x$ ، وفي المثال الثالث $f(x)=e^x$ والمشتقات العليا هي e^x لذلك لم نأخذ في الحل الخاص إلا e^x.

ملاحظة: أما إذا وجدنا اشتراك بين الدالة $f(x)$ و الحل العام للمتجانسة المناظرة y_h عندئذٍ نتبع ما يلي:

1- نقترح الحل الخاص وفقه القاعدة الأساسية

2- بعد ذلك أضرب الجزء المشترك من الحل الخاص y_p بأقل قوة لـ x تزيل هذا الاشتراك.

مثال: لتكن لدينا المعادلة: $y''+4y=\cos 2x$

اقترح حلاً خاصاً للمعادلة المعطاة:

y_h $y''+4y=0$

$M^2+4=0 \Rightarrow M^2=-4 \Rightarrow M^2=4i^2$

~~$(M+2)(M-2)$~~ $M_1=2i \quad M_2=-2i$

$$y_h = A_1 \cdot \cos 2x + A_2 \cdot \sin 2x$$

نقترح حلاً خاصاً وفقه القاعدة الأساسية فيكون من الشكل:

$$y_p = B_1 \cdot \cos 2x + B_2 \cdot \sin 2x$$

نلاحظ بأنه يوجد اشتراك بين y_p , y_h نزيل هذا الاشتراك بأن نضرب جزء المشترك من y_p بأقل قوة لـ x تزيل هذا الاشتراك عندئذٍ يكون الحل الخاص المقترح من الشكل:

$$y_p = B_1 \cdot x \cdot \cos 2x + B_2\, x \cdot \sin 2x$$

$(D^2+4)y = \cos 2x$

$$y_p = \frac{1}{D^2+4} \cos 2x = \frac{x}{2a} \cdot \sin 2x$$

$$= -\frac{x}{4} \sin 2x$$

نشتق هذا الحل الخاص المقترح بعد التعديل عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة التفاضلية ونطابقه لتعيين كلاً من β_1 و β_2

$$\beta_1 = 0 , \quad \beta_2 = -\frac{1}{4}$$

مثال :

$$y'' + 4y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

اقترح حلاً خاصاً ونفذه طريقة المعاملات غير المعينة دون تعيين المعاملات.

الحل العام للمتجانسة المناظرة $y_h = A_1 \cdot \cos 2x + A_2 \sin 2x$

$$y_p = \beta_1 \cdot \cos 2x + \beta_2 \cdot \sin 2x + \beta_3 \cdot e^{2x} + \beta_4 x^2 + \beta_5 x + \beta_6$$

نضرب فقط الجزء المشترك من y_h بأقل قوة لـ x تزيل هذا الاشتراك فيكون

$$y_p = \beta_1 x \cdot \cos 2x + \beta_2 x \sin 2x + \beta_3 \cdot e^{2x} + \beta_4 x^2 + \beta_5 x + \beta_6$$

ثانياً : طريقة المؤثر التفاضلي العكسي :

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية $\varphi(D) \cdot y = F(x)$ لإيجاد الحل الخاص وفق طريقة المؤثر التفاضلي العكسي ما علينا إلا أن نؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي فإن الحل الخاص :

$$y_p = \frac{1}{\varphi(D)} \cdot F(x)$$

تمتاز هذه الطريقة بأنها أسرع الطرق وأسهلها عندما نكون حافظين الخواص. يعيبها بأنها لا تصلح إلا لدوال التي لها عدد منتهي من المشتقات العليا.

كما أن هذه الطريقة لا يمكن استخدامها إذا كانت المعادلة ذات معاملات متغيرة لا يمكن استخدامها.

SUBJECT: / /

أمثلة:

1- $y'' + 4y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$

لإيجاد الحل الخاص

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي فنجد أن

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}(\cos 2x + e^{2x} + x^2)$$

$$= \frac{1}{D^2+4}\cdot\cos 2x + \frac{1}{D^2+4}e^{2x} + \frac{1}{D^2+4}x^2$$

$$\frac{1}{D^2+4}\cdot\cos 2x = \frac{x}{2a}\sin 2x = \frac{x}{4}\sin 2x$$

$$\frac{1}{D^2+4}\cdot e^{2x} = \frac{1}{8}e^{2x} \quad ; \quad \frac{1}{D^2+4}x^2 = \frac{1}{1+\frac{1}{4}D^2}x^2$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}D^2\right)x^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

$$y_p = \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

-2- أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - 4y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

~~وفق المؤثر التفاضلي العكسي~~

أ) وفق طريقة المعاملات غير معينة:

$$y'' - 4y = 0$$

$$M^2 - 4 = 0 \Rightarrow M^2 = 4 \Rightarrow M_1 = 2, \quad M_2 = -2$$

$$y_h = A_1 e^{2x} + A_2 e^{-2x}$$

$$y_p = B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x + B_3 e^{2x} + B_4 x^2 + B_5 x + B_6$$

نلاحظ أنه يوجد اشتراك بين y_p ، y_h والحد المشترك هو e^{2x} نضرب الحد المشترك من y_p بأقل قوة لـ x تزيل الاشتراك فيصبح الحل الخاص المقترح هو:

$$y_p = B_1 \cdot \cos 2x + D_2 \cdot \sin 2x + B_3 x \cdot e^{2x} + D_4 x^2 + B_5 x + B_6$$

الحل وفقه المؤثر التفاضلي العكسي:

$$(D^2-4)y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-4}(\cos 2x + e^{2x} + x^2)$$

$$= \frac{1}{D^2-4}\cdot \cos 2x + \frac{1}{D^2-4} e^{2x} + \frac{1}{D^2-4} x^2$$

$$\frac{1}{D^2-4}\cdot \cos 2x = -\frac{1}{8} \cos 2x$$

$$\frac{1}{D^2-4}\cdot e^{2x} = \frac{x \cdot e^{2x}}{4}$$

$$\varphi(D) = D^2-4 \Rightarrow \varphi(2) = 0$$
$$\varphi'(D) = 2D \Rightarrow \varphi'(2) = 4$$

$$\frac{1}{D^2-4} x^2 = -\frac{1}{4}\cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}D^2}\cdot x^2 = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}D^2\right)x^2 = -\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$$

$$y_p = -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{x e^{2x}}{4} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

ثالثاً: طريقة لاغرانج أو الثوابت المتغيرة:

وجدنا بأن الحل الخاص وفقه هذه الطريقة يعطى بالعلاقة:

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + \text{———} \; y_n \int \frac{w_n}{w} dx$$

تتميز بأنها تصلح لكافة أنواع الدوال أياً كان $f(x)$ كما أن هذه الطريقة تصلح للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة والمتغيرة.

ومساوئها تزداد صعوبة كلما ارتفعت رتبة المعادلة، كما أنه عند حساب تكاملات الموجودة في الطرف الأيمن قد نصادف تكاملات لا يمكن حسابها بطريقة التي تعلمنا مثلاً قد يكون $\int e^{x^2}dx$ أو $\int \frac{\sin x}{x} dx$.

مثال: أوجد الحل العام $y'' - 4y = e^{2x}$

الحل العام للمتجانسة هو $y_h = A_1 e^{2x} + A_2 e^{-2x}$

$$w = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{2x} \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ e^{2x} & -2e^{2x} \end{vmatrix} = -1$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

$$y_p = e^{2x} \int \frac{-1}{-4} dx - e^{-2x} \int \frac{e^{4x}}{-4} dx$$

$$y_p = \frac{1}{4} e^{2x} \int dx - \frac{e^{-2x}}{4} \int e^{4x} dx$$

$$y_p = \frac{1}{4} e^{2x} x - \frac{1}{16} \cdot e^{2x}$$

$$y_p = \frac{x}{4} e^{2x}$$ ناتج سابقه

الفرق بين الناتجين هو $-\frac{1}{16} e^{2x}$ لكن بما أن

$$(D^2-4)\left(-\frac{1}{16} e^{2x}\right) = -\frac{1}{16}(D^2-4)e^{2x} = -\frac{1}{16}(4-4)e^{2x} = 0$$

ملاحظة: إذا كان لدينا معادلة تفاضلية

$$\varphi(D).y = F(x)$$

وكان أولاً:

$$F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \text{———} a_1 x + a_0$$

عندئذ يكون الحل المقترح من الشكل:

$$y_p = B_n . x^n + B_{n-1} . x^{n-1} + \text{———} B_1 x + x_0$$

انعدام أحد المعاملات a_{n-1} ——— a_1 , a_0 لا يعني بالضرورة انعدام المعامل المقابل للحل الخاص المقترح.

ثانياً: إذا كان

$$F(x) = e^{mx}$$

فالحل الخاص المقترح

$$y_p = B.e^{mx}$$

ثالثاً: إذا كان

$$F(x) = b_1 . \cos\beta x + b_2 . \sin\beta x$$

فإن الحل الخاص المقترح يكون من الشكل:

$$y_p = B_1 . \cos\beta x + B_2 . \sin\beta x$$

رابعاً: إذا كان

$$F(x) = e^{mx}(a_n x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + \text{———} + a_1 x + a_0)$$

فإن الحل الخاص المقترح يكون:

$$y_p = e^{mx}(b_n x^n + \text{———} + b_1 x + b_0)$$

خامساً: إذا كان

$$F(x) = e^{mx}(b_1 . \cos\beta x + b_2 . \sin\beta x)$$

الحل الخاص المقترح يكون من الشكل:

$$y_p = e^{mx}(B_1 . \cos\beta x + B_2 . \sin\beta x)$$

سادساً: إذا كان:

SUBJECT:

$$F(x) = e^{\alpha x}[(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ___ + b_1 x + b_0) + (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ___ + c_1 x + c_0) \cdot \sin\beta x$$

الحل الخاص المقترح يكون

$$y_p = e^{\alpha x}((B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + ___ + B_1 x + B_0)\cos\beta x + (E_n x^n + ___ + E_1 x + E_0)\sin\beta x)$$

سابعاً: إذا كان $F(x) = A_1 \cdot sh\, \beta x + A_2 \cdot ch\, \beta x$
عندئذٍ الحل الخاص المقترح يكون من الشكل:

$$y_p = B_1 \cdot sh\, x + B_2 \cdot ch\, x$$

الثامنة: إذا كان تركيب من الحالات السابقة ~~الحالات~~ فإن الحل الخاص المقترح يكون تركيب من الحالات المقابلة:

$$f(x) = x + x^2 \cdot e^{2x} + \sin x$$

$$y_p = (B_1 x + B_0) + (B_2 x^2 + B_3 x + B_4) e^{2x} + B_5 \sin x + B_6 \cos x$$